Integrale

Primitive, reguli, integrala definită și aplicații · liceu, pregătire pentru Bac

Didaxis
Fișe de formule · Matematică

Primitive uzuale (pe intervale)

Constanta de integrare $C \in \mathbb{R}$; formulele sunt valabile pe intervale incluse în domeniul indicat.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Condiții
x^a	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C$	$a \neq -1$; $x>0$ (sau $x \in \mathbb{R}$ dacă $a \in \mathbb{N}$)
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$ (pe un interval)
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	$a>0,\ a\neq 1$
e^x	e^x+C	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$x \neq k\pi$
$\operatorname{tg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\cos x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\sin x \neq 0$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right\rvert + C$	$\sin x \neq 0$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	$\cos x \neq 0$
$\ln x$	$x\ln x - x + C$	$x>0$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$	$a>0$
$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$a>0$, $x\neq\pm a$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}+C$	$a>0$, $\lvert x\rvert<a$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$	$a>0$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$	$a>0$, $\lvert x\rvert>a$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$	$a>0$, $\lvert x\rvert\leq a$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C$	$a>0$
$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}+C$	
$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$	

Primitive de funcții compuse liniar și prin părți

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	Condiții ($a\neq 0$)
$(ax+b)^n$	$\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$	$n\neq -1$
$\dfrac{1}{ax+b}$	$\dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$	$ax+b\neq 0$
e^{ax+b}	$\dfrac{e^{ax+b}}{a}+C$	
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}+C$	
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{\sin(ax+b)}{a}+C$	
$x\,e^x$	$(x-1)e^x+C$	(prin părți)
$x\sin x$	$\sin x - x\cos x + C$	(prin părți)
$x\ln x$	$\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C$	$x>0$ (prin părți)

Reguli de integrare

Liniaritate: $\int(\alpha f+\beta g)=\alpha\int f+\beta\int g$.

Integrare prin părți: $\displaystyle\int f\,g'\,dx = f\,g - \int f'\,g\,dx$ (f, g de clasă C^1).

Schimbare de variabilă: $\displaystyle\int f\big(u(x)\big)u'(x)\,dx = F\big(u(x)\big)+C$, unde $F'=f$.

Primitive: o funcție F cu $F'=f$ pe un interval I; orice alta diferă printr-o constantă.

Descompunere	Condiții
$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{1}{a-b}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}\right)$	$a\neq b$, $x\neq a, b$
$\dfrac{1}{x(x+a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+a}\right)$	$a\neq 0$, $x\neq 0, -a$

Integrale

Primitive, reguli, integrala definită și aplicații · liceu, pregătire pentru Bac

Integrala definită

Proprietate	Formula	Ipoteze
Newton–Leibniz	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big\|_a^b$	f continuă pe $[a,b]$; F primitivă a lui f pe $[a,b]$
Aditivitate	$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$	f continuă pe $[a,b]$; $c \in [a,b]$
Inversarea limitelor	$\int_b^a f = -\int_a^b f$	f continuă pe intervalul care conține a și b
Monotonie	$f \le g$ pe $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$	$a \le b$; f, g continue pe $[a,b]$ (pentru $a > b$ inegalitatea se inversează)
Modul	$\left\|\int_a^b f\right\| \le \int_a^b \|f\|$	$a \le b$; f continuă pe $[a,b]$
Prin părți	$\int_a^b f\,g' = [f\,g]_a^b - \int_a^b f'\,g$	f, g de clasă C^1 pe $[a,b]$
Schimbare de variabilă	$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$	u de clasă C^1 pe $[a,b]$; f continuă pe $u([a,b])$
Funcție impară / pară	f impară: $\int_{-a}^a f = 0$; f pară: $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$	$a > 0$; f continuă pe $[-a,a]$
Funcție periodică	f periodică de perioadă T: $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$	$T > 0$; f continuă pe $\mathbb{R}$

Aplicații ale integralei

Mărime	Formula	Condiții
Aria subgraficului	$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,dx$	$f \ge 0$ continuă pe $[a,b]$
Aria dintre două grafice	$\mathcal{A} = \int_a^b \big\|f(x) - g(x)\big\|\,dx$	f, g continue pe $[a,b]$
Volumul corpului de rotație (în jurul Ox)	$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$	f continuă, $f \ge 0$
Lungimea graficului	$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$	f de clasă C^1
Aria laterală a corpului de rotație	$\mathcal{A}_\ell = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx$	$f \ge 0$, de clasă C^1
Valoarea medie pe $[a,b]$	$\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$	f continuă

Valori utile

Integrală definită	Valoare
$\int_0^1 x^n\,dx$	$\dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
$\int_a^b \dfrac{dx}{x}$	$\ln\dfrac{b}{a}$, $0 < a < b$
$\int_0^\pi \sin x\,dx$	2
$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\int_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\int_0^{1/2} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{\pi}{6}$
$\int_0^1 x e^x\,dx$	1
$\int_1^e \ln x\,dx$	1

Integrale definite de funcții continue pe intervalul de integrare; integralele improprii nu fac parte din programa de liceu și nu sunt incluse.