Derivate

Tabel, reguli de derivare și aplicații · liceu, pregătire pentru Bac

Didaxis
Fișe de formule · Matematică

Definiția derivatei

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dacă limita există și este finită (f derivabilă în x_0).

Derivabilitate $\Rightarrow$ continuitate (reciproca nu e adevărată: $|x|$ în 0).

Reguli de derivare

Regulă	Formula	Condiții
Sumă, diferență	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	u, v derivabile
Constantă ori funcție	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$	$c \in \mathbb{R}$
Produs	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$	u, v derivabile
Cât	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$
Compusă	$(f \circ u)'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x)$	u derivabilă în x, f în $u(x)$
Funcție inversă	$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$	f bijectivă pe un interval, derivabilă în x_0, f^{-1} continuă în $y_0 = f(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$
Putere de funcție	$(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{v\,u'}{u}\right)$	$u > 0$

Derivatele funcțiilor elementare

$f(x)$	$f'(x)$	Condiții
c (constantă)	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$
x^a	$a\,x^{a-1}$	$a \in \mathbb{R}$, $x > 0$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$n \geq 2$, $x > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1 + x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\lvert x \rvert$	$\dfrac{x}{\lvert x \rvert}$	$x \neq 0$

Derivatele funcțiilor compuse

$f(x)$	$f'(x)$	Condiții ($u = u(x)$ derivabilă)
u^a	$a\,u^{a-1}\,u'$	$u > 0$ dacă $a \notin \mathbb{Z}$; $u \neq 0$ dacă $a \in \mathbb{Z}$, $a < 0$; orice u dacă $a \in \mathbb{N}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u > 0$
e^u	$u'\,e^u$	
a^u	$u'\,a^u \ln a$	$a > 0,\ a \neq 1$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$	$u > 0$
$\sin u$	$u' \cos u$	
$\cos u$	$-u' \sin u$	
$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{u'}{\cos^2 u}$	$\cos u \neq 0$
$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$	$\sin u \neq 0$
$\arcsin u$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$	$\lvert u \rvert < 1$
$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{u'}{1 + u^2}$	

Pentru $\ln |u|$ se obține tot $\dfrac{u'}{u}$, cu $u \neq 0$.

Aplicații

- **Monotonie.** Dacă f este derivabilă pe intervalul I: $f' \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare; $f' \leq 0 \Rightarrow f$ descrescătoare; $f' > 0 \Rightarrow f$ strict crescătoare; $f' < 0 \Rightarrow f$ strict descrescătoare.
- **Extreme.** Dacă f este continuă în x_0 și f' își schimbă semnul în x_0: de la $+$ la $-$ $\Rightarrow$ maxim local; de la $-$ la $+$ $\Rightarrow$ minim local. **Teorema lui Fermat:** un extrem local interior, în care f e derivabilă, are $f'(x_0) = 0$ (reciproca e falsă: x^3 în 0).
- **Convexitate.** Dacă f este de două ori derivabilă pe I: $f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexă; $f'' \leq 0 \Rightarrow f$ concavă (strict convexă dacă $f'' > 0$, strict concavă dacă $f'' < 0$). Punct de inflexiune: f'' își schimbă semnul și f are tangentă în punct.
- **Tangenta** la graficul lui f în x_0: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Panta tangentei $= f'(x_0)$; viteza instantanee $v(t) = s'(t)$; accelerația $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Asimptotele funcției f

Orizontală: $y = \ell$ dacă $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Oblică ($x \to \pm\infty$): $y = mx + n$, $m = \lim \dfrac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^*$, $n = \lim\big(f(x) - mx\big) \in \mathbb{R}$.

Verticală: $x = a$ dacă $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$ sau $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$.

Teoreme importante

Rolle: f continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b), $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b),\ f'(c) = 0$.

Lagrange: f continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe $(a,b) \Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Regula lui l'Hospital (pentru $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$): dacă $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ există, atunci $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (cu $g'(x) \neq 0$ în jurul punctului).

Derivate de ordin superior

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$	Condiții
e^x	e^x	$n \in \mathbb{N}$
$\sin x$	$\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$	$n \in \mathbb{N}$
$\cos x$	$\cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$	$n \in \mathbb{N}$
x^m	$\dfrac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n}$	$m, n \in \mathbb{N},\ n \le m$
$\ln x$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$	$x > 0,\ n \ge 1$
$u \cdot v$ (formula lui Leibniz)	$(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)} v^{(n-k)}$	u, v de n ori derivabile; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$